High luminosity, Beam-beam interaction and Chaos

K. Ohmi

Soken-dai

24 May, 2006

ルミノシティ

- 素粒子の衝突頻度(s^{-1})＝L x σ_{crs}

σ_{crs}：衝突断面積

- L: ルミノシティ ($cm^{-2}s^{-1}$)

$$L = f_{\text{rep}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dz_+ \int_{-\infty}^{\infty} dz_-$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\, \rho_+(x, y, z_+; s)\rho_-(x, y, z_-; s)\delta(z_+ - z_- - s)$$

$$\approx \frac{N_+ N_-}{4\pi\sigma_x\sigma_y} f_{\text{rep}}$$

f_{rep}: ビーム（バンチ）の衝突頻度, ρ: バンチ内粒子分布, N: バンチ内粒子数$\sigma_{x,y}$: ビームサイズ

円形衝突加速器におけるビームビーム限界

- バンチ内粒子数を増やせば、いくらでもルミノシティが上がるのか。
- ビームサイズを小さくすれば、いくらでもルミノシティが上がるのか。

- エミッタンス (ビームサイズ) 増大によるルミノシティの低下
- エミッタンスは保存量ではないのか？

エミッタンス増大

- ビーム振動、不安定性
- 線形結合による他自由度からのまわりこみ、ビーム強度に無関係
- ビームビーム相互作用による非線形効果。

円形衝突加速器におけるビームビーム限界

- N個の粒子を持ったビームの衝突
- 3N+3Nの自由度

- Strong-strong model　６N自由度
- Weak-strong model　 3+1自由度

Model

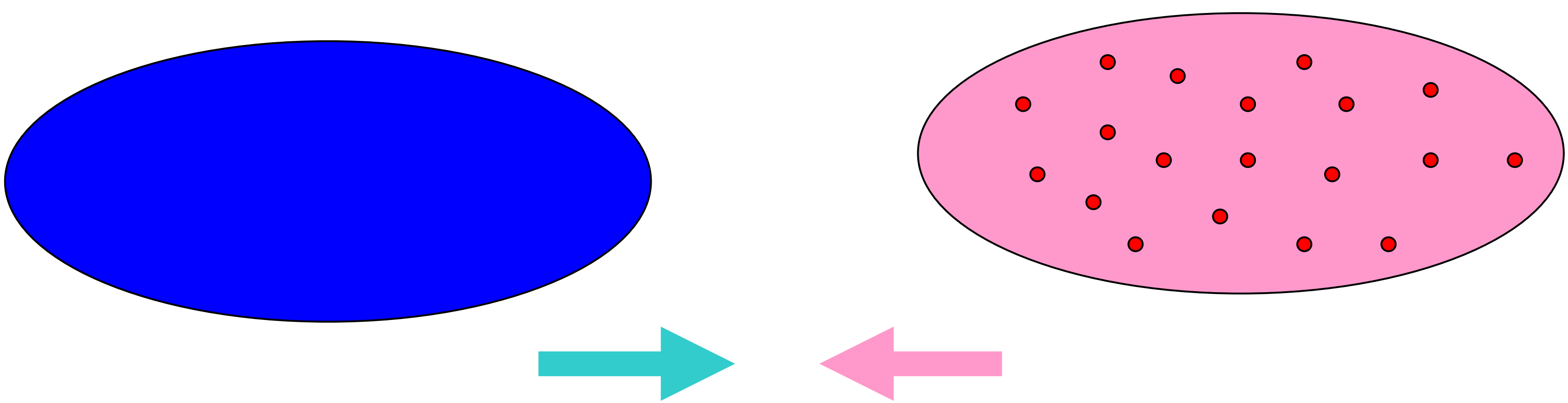
- Weak-strong model

Strong beam

fixed charge distribution

weak beam

macro-particles



Weak-strong model

- ４ 自由度、（時間依存のため）
- 周期系

$$H(x, p_x, y, p_y, z, p_z; s) = H'(J_1, \varphi_1, J_2, \varphi_2, J_3, \varphi_3; s)$$

$$\varphi(s+L) = \varphi(s) + 2\pi\nu$$

$$J_x = \frac{\gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2}{2}$$

Beam dynamics in circular colliders

- **力学変数** **x**=(x,p_x,y,p_y,z,p_z)
- **加速器での1周の変換**.

(1) **加速器の周回**

$$\mathbf{x}(s-\varepsilon)=M\mathbf{x}(s-C+\varepsilon)$$

(2) **ビームビーム衝突**(y、x**も同様**)

$$p_y(s+\varepsilon)=p_y(s-\varepsilon)-\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial y}$$

- **周回写像** One turn map (transformation): **上の2つの変換の合成**

$$\mathbf{x}(s+\varepsilon)\Leftarrow\mathbf{x}(s-C+\varepsilon)$$

時間(s)に依存したHamiltonian、自由度＋1

- **形式的に時間変数τを導入。**
- Redefine τ **を含まない**H**を作り、** ds/dτ=1**になるようにする。1つ自由度が増えた**H**になる。**

$$\hat{H}(r, p_r, s, p_s) = p_s + H(r, p_r, s)$$

$$\dot{s} = \frac{\partial \hat{H}(r, p_r, s, p_s)}{\partial p_s} = 1 \qquad \dot{p}_s = \frac{\partial \hat{H}(r, p_r, s, p_s)}{\partial s}$$

古典力学で“解ける”ということ

- HがJのみで表され、φによらないような３つのJを変換（正準変換）で見つけることができる。
- たとえば線形系。
- 粒子はJ=定数の曲線に沿って運動。初期条件のJは不変、エミッタンス増大はしない。

$$\frac{dJ}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad J = \mathrm{const}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} \qquad \oint d\varphi = 2\pi\nu(J)$$

ビーム粒子の分布

- 外的摂動がない場合、初期値のJが保存される。普遍的な分布はJのみの関数

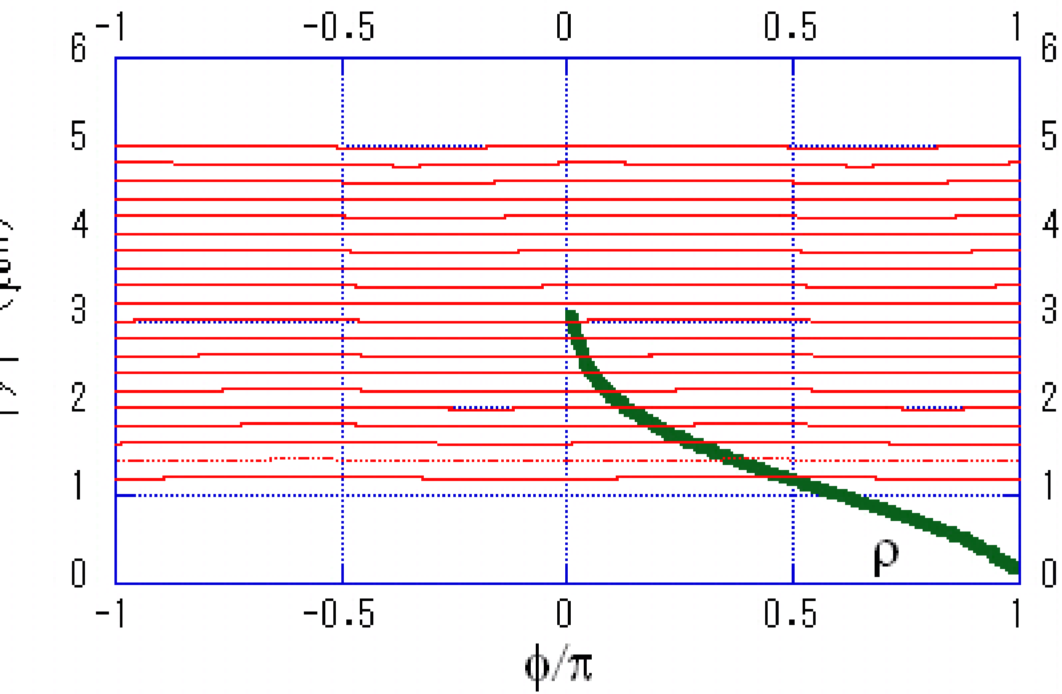
$$\psi(J(J_0,\varphi_0)) \qquad < J >= \varepsilon$$

- 拡散と減衰がある場合の平衡分布。

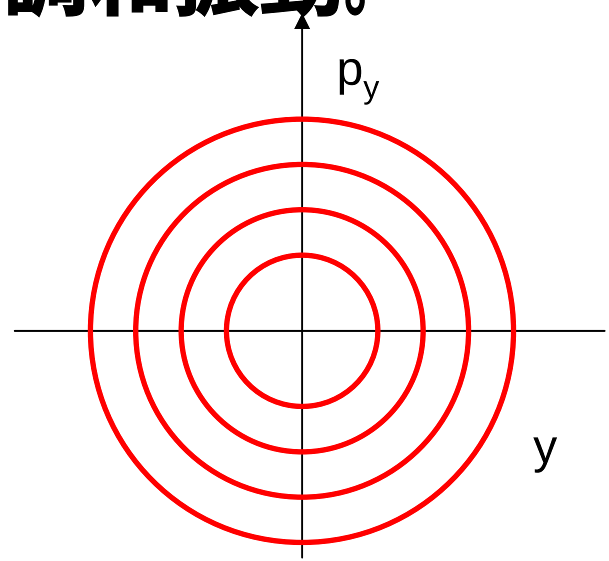
$$\psi(J) \approx \exp\left(-\frac{J_1}{\varepsilon_1}-\frac{J_2}{\varepsilon_2}-\frac{J_3}{\varepsilon_3}\right) \qquad \varepsilon\text{: emittance}$$

線形系

- 自由度の結合を3つの固有振動を持つ3つの独立な振動に分離すれば、それぞれ1+1自由度問題。βで規格化すれば調和振動。

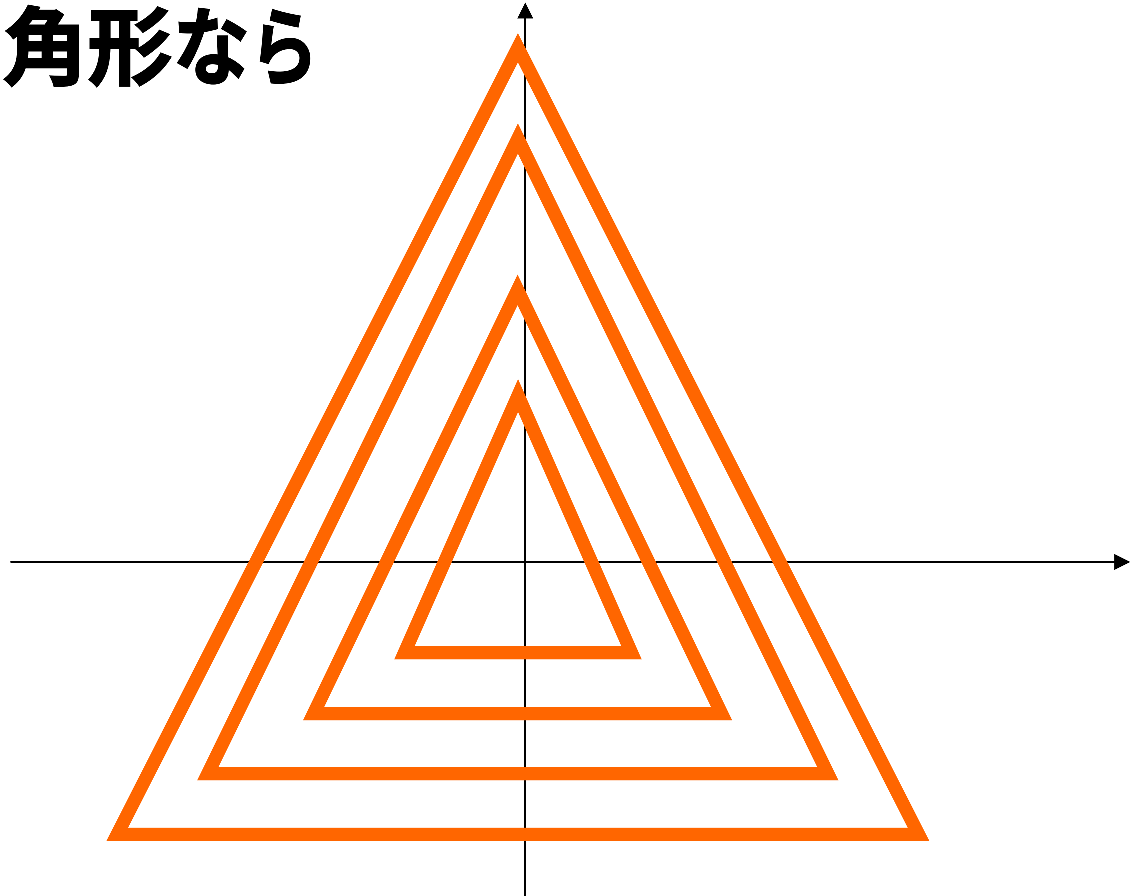


φ方向に開いた図



1自由度の場合

- $H(J_0, \varphi_0)$=**一定という積分は常に存在。**$J(H(J_0, \varphi_0))$=**一定という**J**を見つければ、**$H(J)$**となる。**
- $J(J_0, \varphi_0)$**が三角形なら**



“解けない”ということ

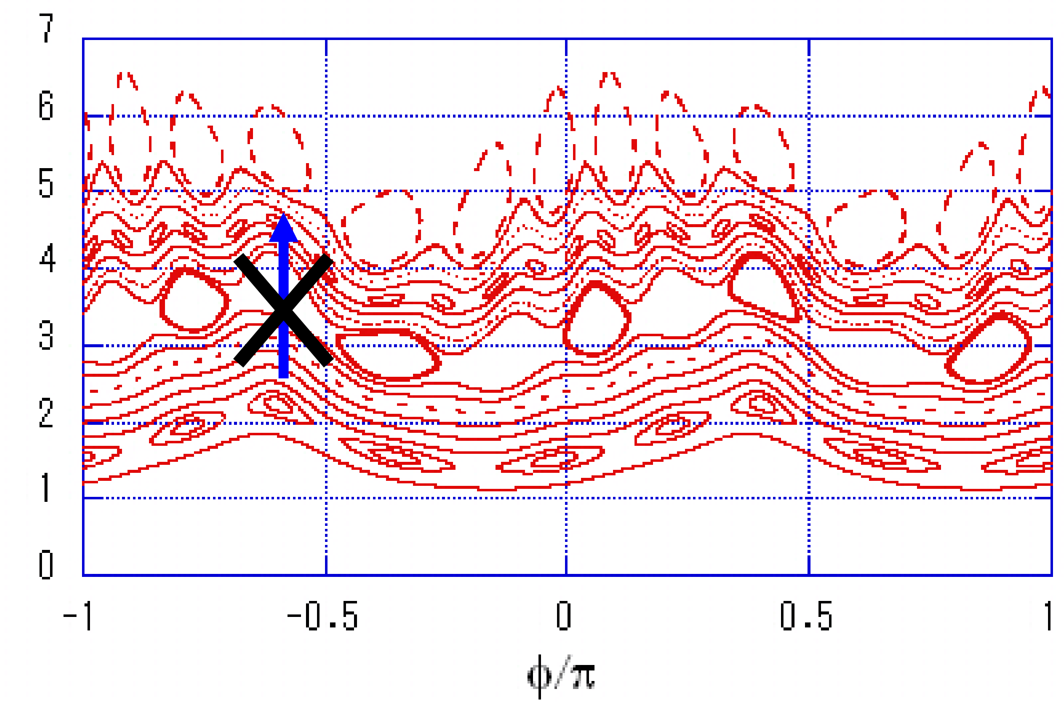
- 一般には解ける場合は少ない。上述以外はきわめて特殊なモデルしかない。
- H(J)になるようなJが存在しない。
- $J(J_0, \varphi_0)$=一定で表される曲線が存在しない。

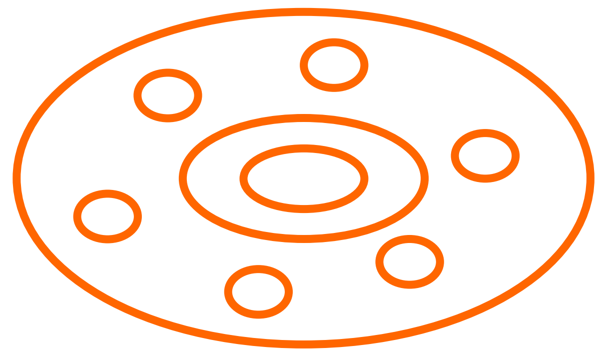
2自由度(時間に依存した1自由度)

- $H(y,p_y,s,p_s)$=一定
- 2つの角変数、一つは周回角変数。もう一つはy-p_yに関係した角変数。
- 3つの独立変数
- $s=s_0$でのy-p_y断面、ポアンカレプロット。
- もう一つ積分が存在すればy-p_y断面に閉じた曲線が描ける(例えば線形の場合)。KAM曲線。

2自由度での粒子の運動

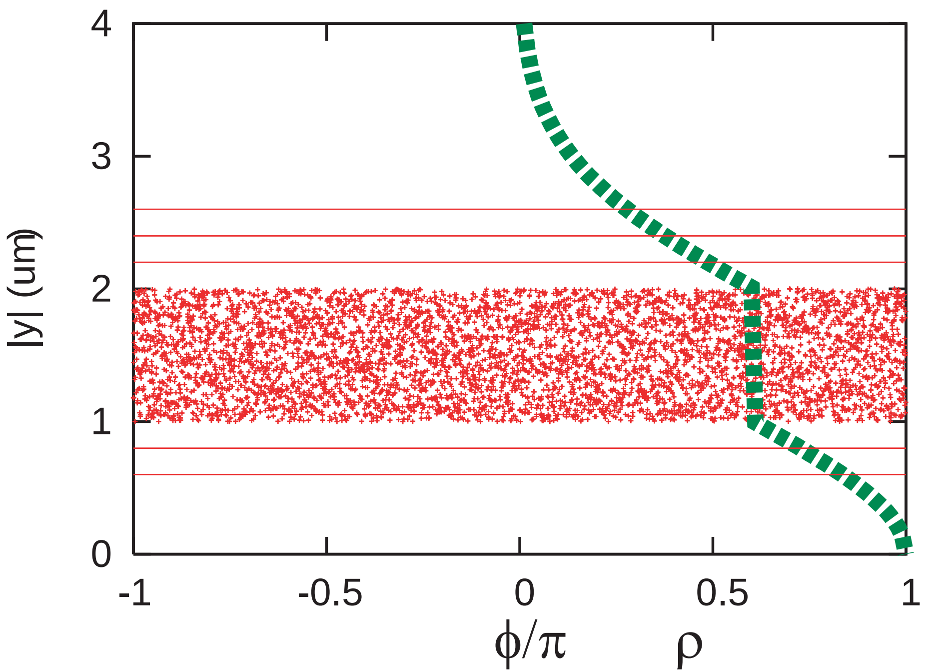
- KAM 曲線があればそれに沿って運動
- 粒子はKAM曲線を横切って運動できない。
- エミッタンス増大は起こりうるが、制限される。





エミッタンス増大の例

- 平衡エミッタンス
- 実際にはこのパターンのエミッタンス増大は弱い。



2自由度の具体例、円形ビーム

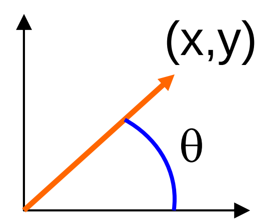
- チューンが等しくシンクロトロン振動なし。（ここではzは運動に効かない。）

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2}{2}+\frac{\omega_\beta^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+\delta_P(s)F(r,z)$$

$$=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+\frac{\omega_\beta^2 r^2}{2}+\delta_P(s)F(r,z)$$

$$p_r=r'=p_x\cos\theta+p_y\sin\theta$$

$$p_\theta=r^2\theta'=r\left(-p_x\sin\theta+p_y\cos\theta\right)$$



$$z=s-ct$$

- H は θ,を含まない、 p_θは運動の常数。
- 軌道はr-p_r-sのドーナツ状
- Poincare cross-section

The force for a round charge distribution

- The force depends on z, because of $\sigma_r(z)$ of strong beam or electron cloud.

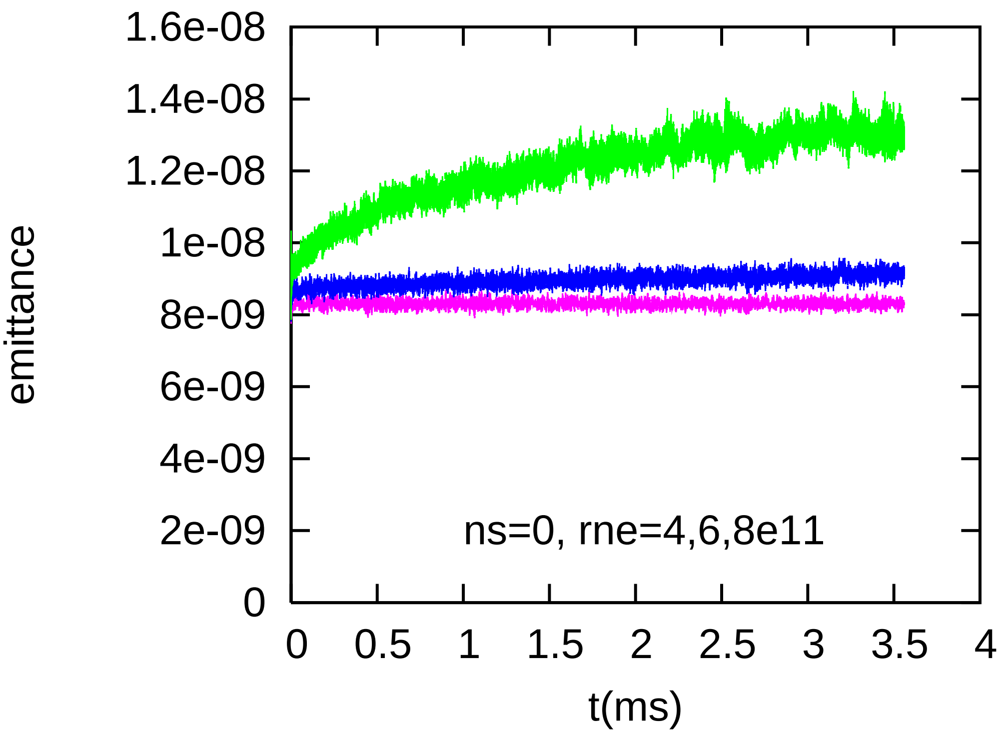
$$U(r;\sigma_r(z)) = -\frac{r_e}{\gamma}\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\dfrac{r^2}{2\sigma_r^2+u}\right)}{2\sigma_r^2+u}du$$

$$F_r = -\frac{\partial U(r;\sigma_r(z))}{\partial r} = -\frac{2r_e}{\gamma}\frac{1}{r}\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)\right]$$

$$F_z = -\frac{\partial U(r;\sigma_r(z))}{\partial z} = -\frac{\partial U(r;\sigma_r(z))}{\partial \sigma_r^2}\frac{d\sigma_r^2}{dz} = -\frac{2r_e}{\gamma}\frac{1}{2\sigma_r^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)\frac{d\sigma_r^2}{dz}$$

カオスによるエミッタンス増大

- 後でわかるがこの増大はかなり小さい。



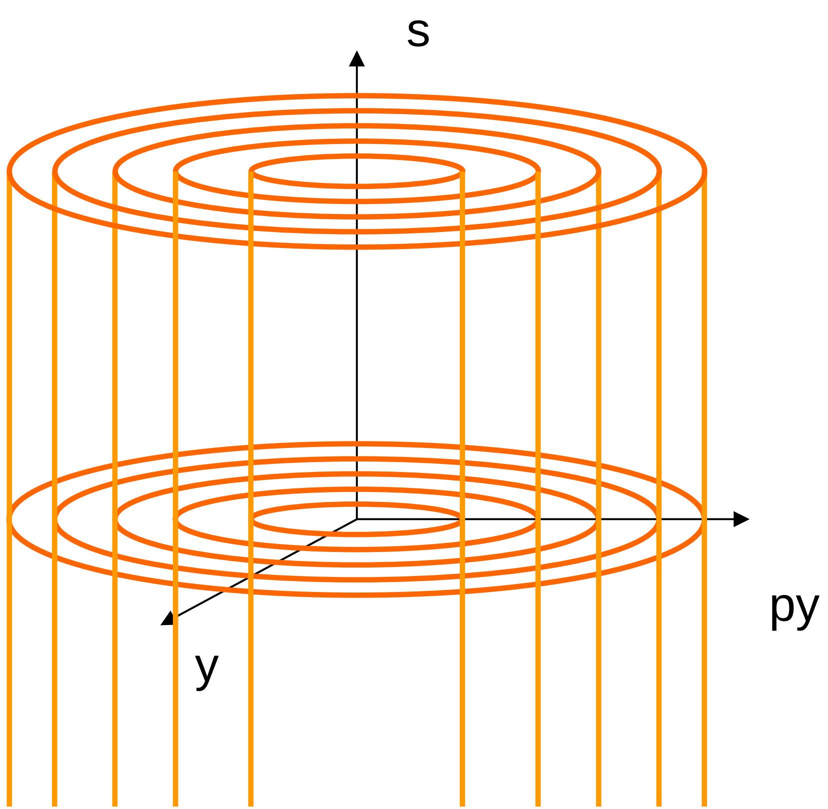
もっと自由度が増えたら
シンクロトロン振動を付加

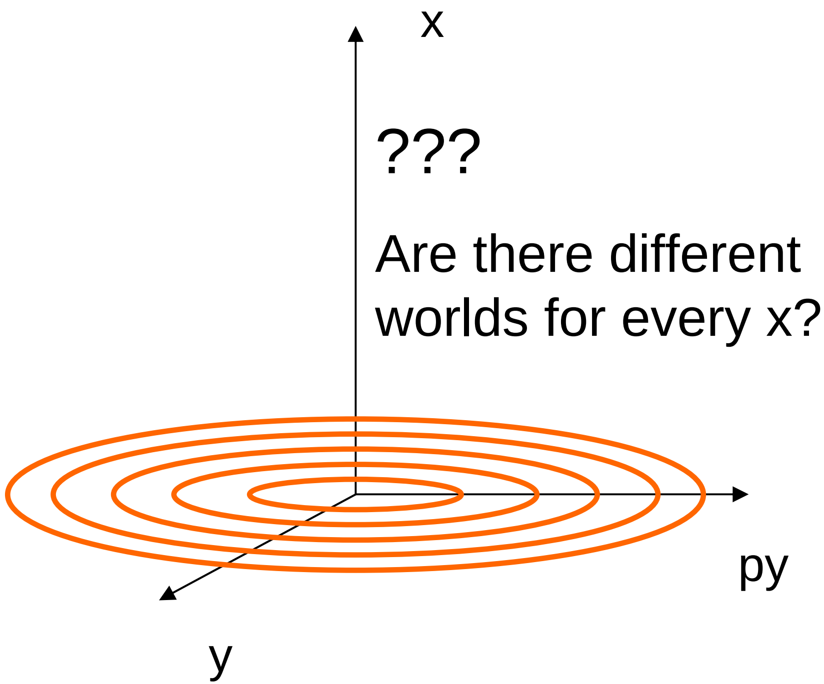
- ３ 自由度

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+\frac{\omega_\beta^2 r^2}{2}-\alpha\frac{p_z^2+\omega_s^2 z^2}{2}+\delta_P(s)F(r,z)$$

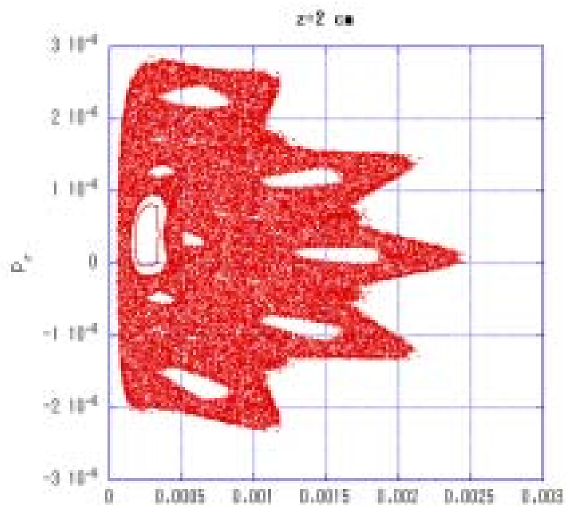
$$z=s-ct$$

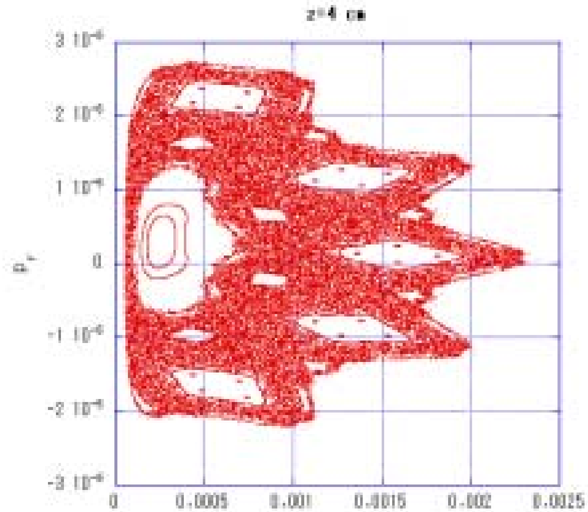
- sに沿ってドーナッツが描ける。
- それぞれのxごとに位相空間の構造は異なる。.
- X方向に1周期した後、もとのy-py位相空間に戻ってくるのか？



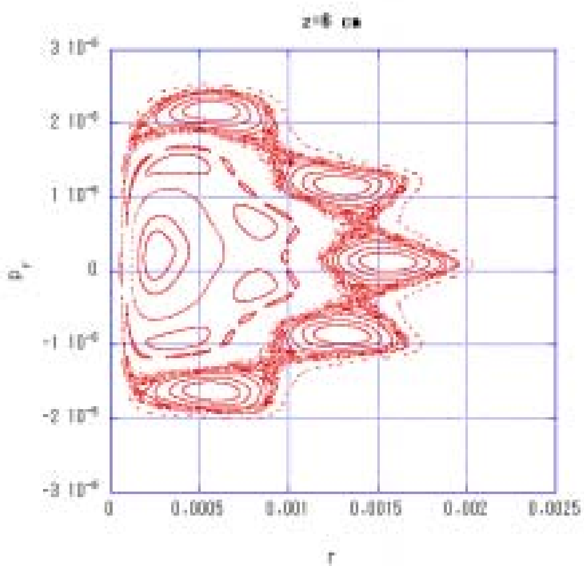


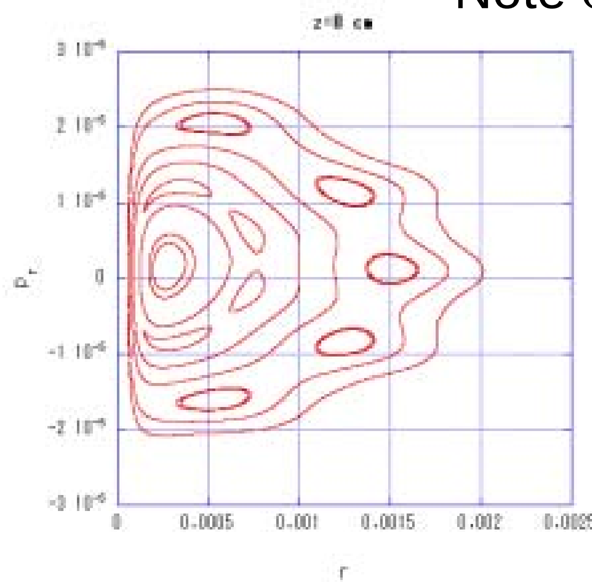
Poincare plot for several z



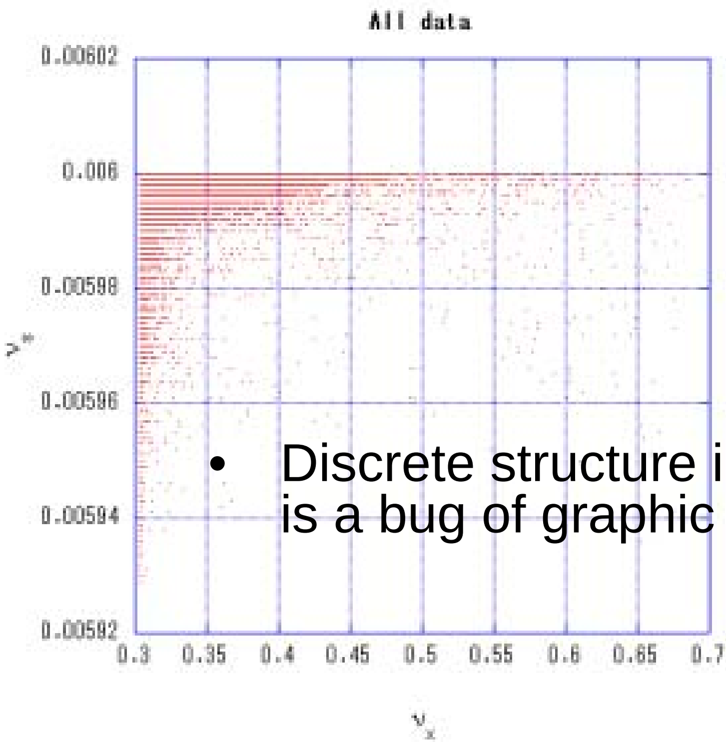


Note σ_r=0.89 mm

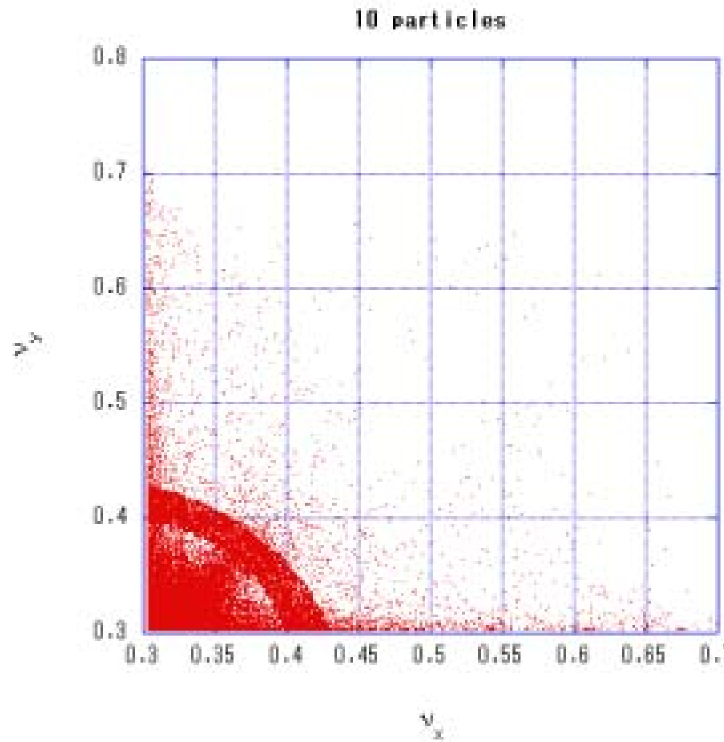




Turn by turn (10000) tune plot for 10 sampled particles

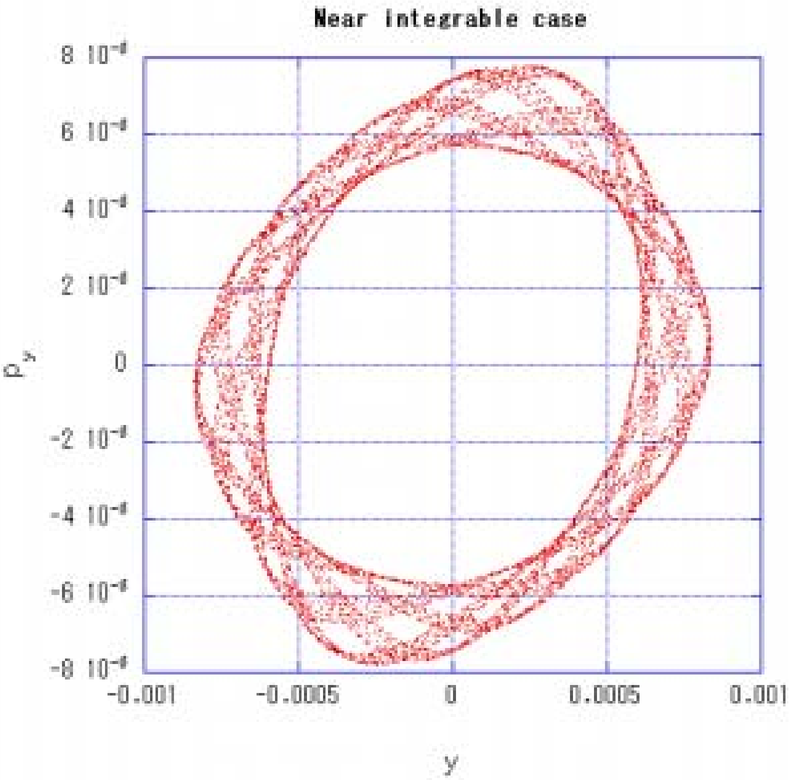


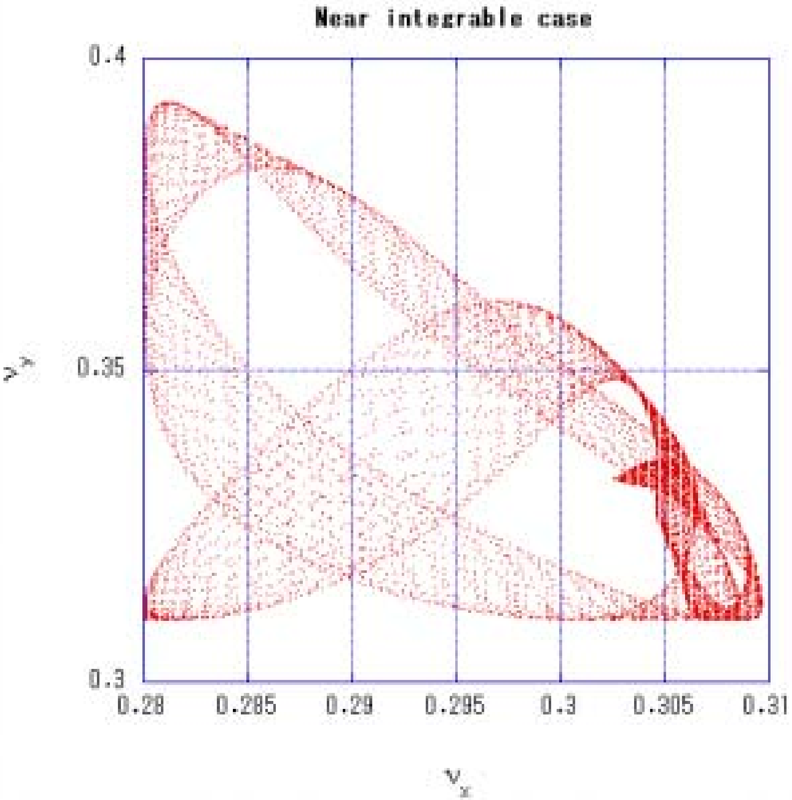
- Discrete structure in ns is a bug of graphic soft



Motion in the phase space and tune space – example I

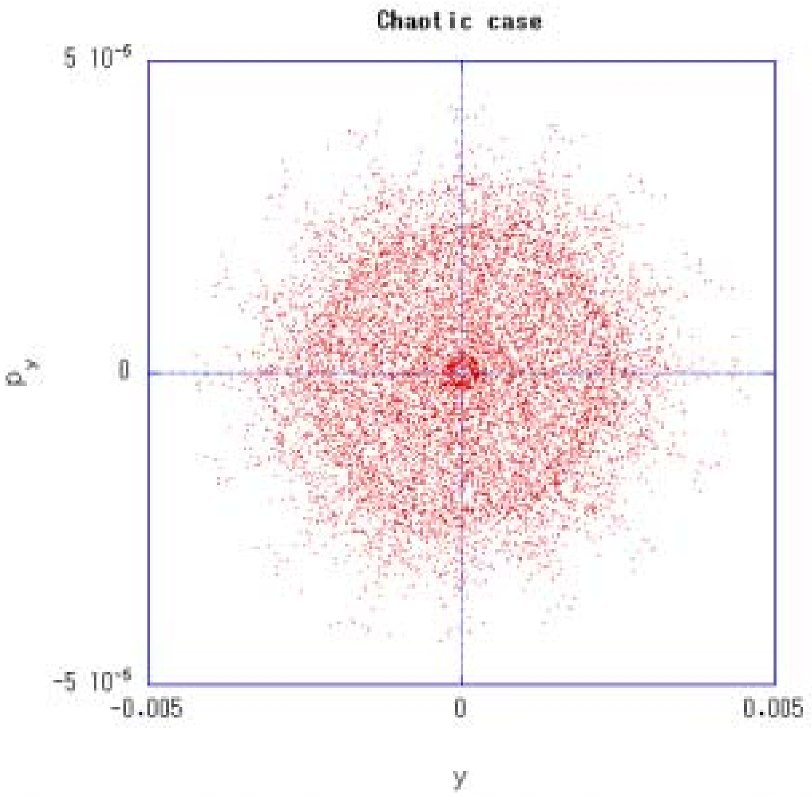
- Near integrable trajectory

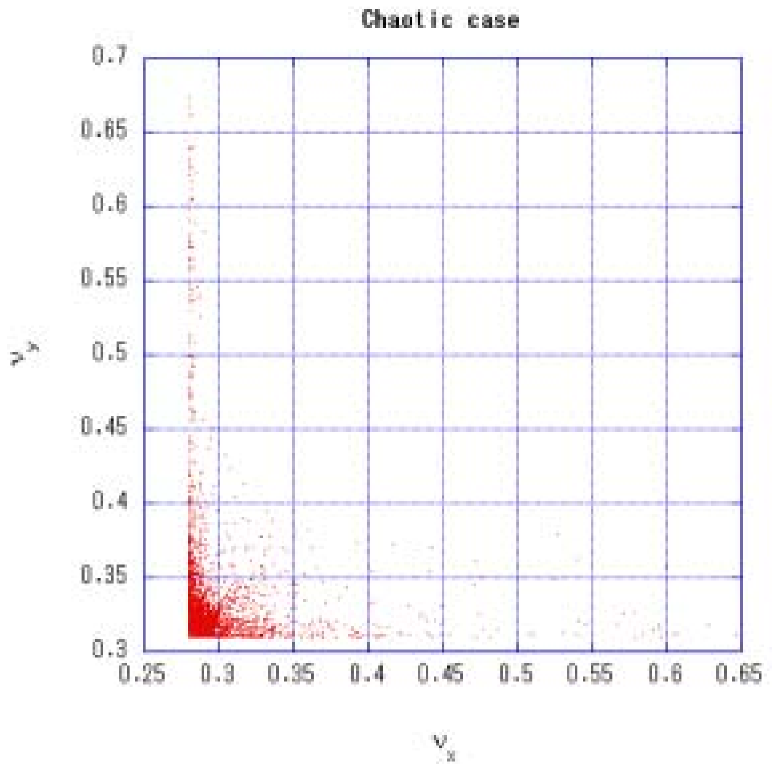




Motion in the phase space and tune space - example II

- Chaotic trajectory

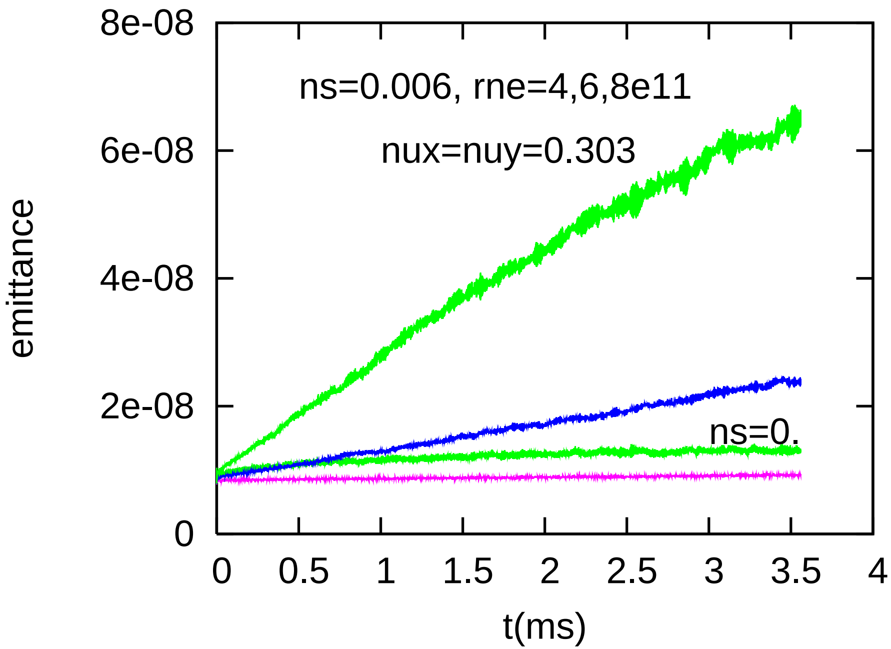


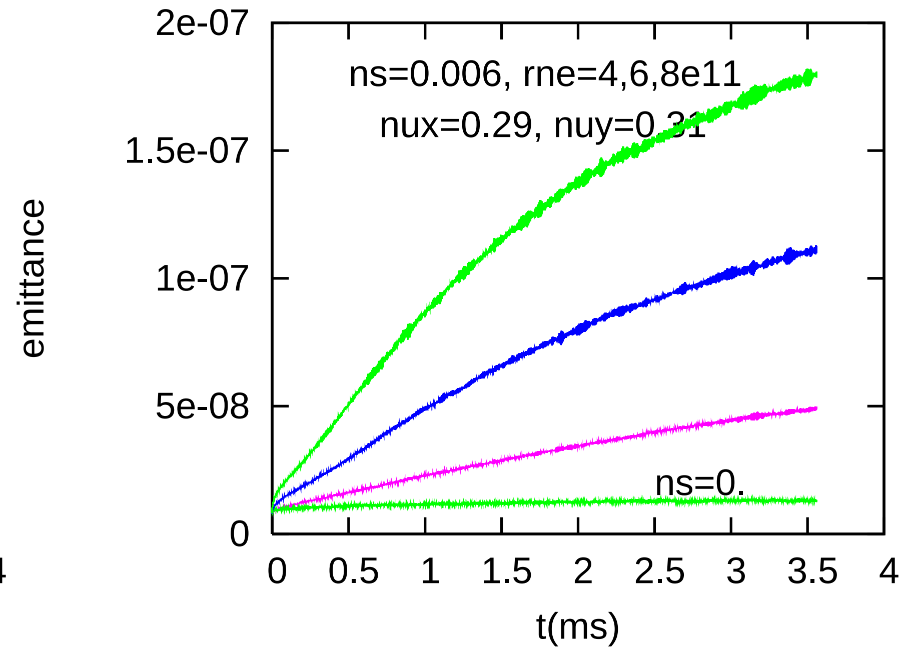


シンクロトロン振動を付加することによるエミッタンス増大

さらにx-yのチューンを変えることで自由度を増やす

- (ν_x, ν_y)=(0.3,0.3) =(0.29,0.31)



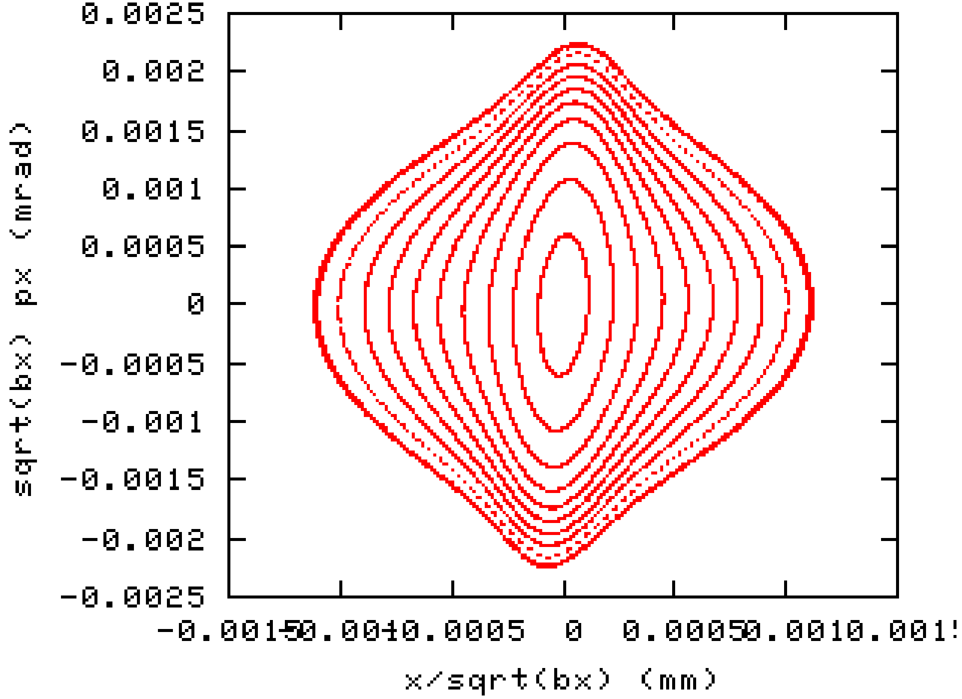


ルミノシティの限界は克服できるのか

- 電子リングの場合はフラットビーム、アスペクト比1:100
- X方向のチューンを0.5に近づけると、可積分性が上がる。
- X方向の運動が解ける。
- Yの運動に対し、xはsの関数なので、自由度は3から2に減少。KAM曲線に閉じ込める。
- 実際KEKBではこの方法で高ルミノシティを達成しさらに高い値を目指す。

$$x = x(s) \qquad \overline{p}_y = p_y - \frac{\partial U(x(s), y)}{\partial y}$$

X方向のチューンと運動



非線形によるエミッタンス増大

- 自由度が増えることで、運動の可積分性が落ちて、不変量がなくなる。拡散的性質を有する。
- 実効的な自由度を減らせれば、ルミノシティ限界は上げられる。
- 高強度ハドロンビームのビーム自身の空間電荷によるエミッタンス増大も同じ問題。